

ELEMENTI COSTRUTTIVI DI MACCHINE BIOMEDICHE

- PROBLEMA DELLA LINEA ELASTICA
- INSTABILITA' DELLA TRAVE A CARICO DI PUNTA
(PROBLEMA BUCKLING O DI EULERO)

A cura di

ing. Andrea Spezzaneve Ph.D.

Mechanical Engineer

The BioRobotics Institute

Scuola Superiore Sant'Anna

email: andrea.spezzaneve@santannapisa.it

web reference: [Industrial R&D](#)

Verifiche di Rigidezza

Sostanzialmente consiste nel quantificare la deformazione di una struttura.

Una struttura che verifichi i criteri di resistenza deve verificare la seguente relazione:

- $\sigma_{eq} \leq \sigma_{amm}$ (ove $\sigma_{amm} = R_a / \alpha$, con α coefficiente di sicurezza)

che si traduce in:

- $\delta_{max} \leq \delta_{amm}$
- $\theta_{max} \leq \theta_{amm}$

Esistono due metodi per la verifica della suddetta relazione:

- Metodo della integrazione della distribuzione complessiva
- Metodo energetico

Nel caso della verifica di rigidezza la deformazione non è puntuale. In ciascun punto la deformazione dipende dalla deformazione complessiva della struttura.

Metodo della linea elastica

Ipotesi sulle quali si fonda il metodo:

- *Linearità*
- *Elasticità*
- *Piccoli spostamenti δ_i e deformazioni ε_i*
- *Trascurabilità degli effetti del Taglio*

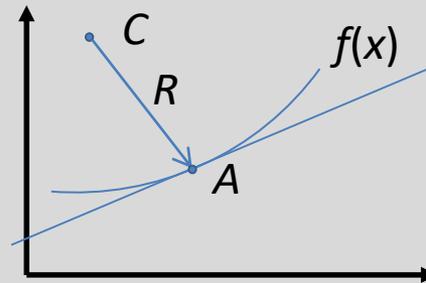
Quest'ultima condizione è verificata quando il taglio è applicato ad una trave e l'effetto prevalente degli spostamenti dei piani è dato dagli effetti flessionali e quindi l'elongazione della trave (deformazione estensionale) è trascurabile

Metodo della linea elastica

Nel piano la flessione determina una curvatura pari a:

- $$\kappa = \frac{M_x}{J_x E}$$

Data una funzione nel piano $f(x)$ si dimostra che esiste un unico punto C chiamato CENTRO DEL CERCHIO OSCULATORE



Il valore geometrico della curvatura κ è pari a:

- $$\kappa = \frac{1}{R} = \frac{-f''(x)}{\left\{1 + [f'(x)]^2\right\}^{3/2}}$$
 e nei punti di massimo e minimo si ha che $\kappa = -f''(x)$

Nel caso della teoria della trave $f(x)$ è la funzione dello spostamento $v(s)$. Nel caso di ipotesi di piccola deformabilità (deformazioni infinitesimali), gli spostamenti della linea d'asse sono tali (piccoli) per cui:

- $\max |v(s)| \approx d < l$ con d diametro della sezione della trave
più ragionevolmente si può perciò assumere quindi

- $$\max |v'(s)| \approx \frac{d}{l} < 1$$

Metodo della linea elastica

A maggior ragione si può asserire che:

- $(v'(s))^2 \approx \left(\frac{d}{l}\right)^2 \ll 1$

Per tale motivo è lecito considerare unitario $\{1 + [f'(x)]^2\}^{3/2}$ il denominatore approssimando così la curvatura con la sua concavità

- $K = -v''(s)$

Sotto le precedenti ipotesi si ha che:

- $-v''(s) = \frac{M_x}{J_x E}$

da cui

- $v''(s) = -\frac{M_x}{J_x E}$

L'equazione precedente è una equazione differenziare del secondo ordine.

Dunque sono necessarie le condizioni al contorno rappresentate da:

- $v(s)$ - lo spostamento

- $v'(s)$ - la rotazione (che deriva dalla condizione $-\frac{dv}{ds} = \varphi$)

Derivando $v''(s)$ si ha inoltre che:

- $v'''(s) = -\frac{dM_x}{ds} \frac{1}{J_x E}$

Metodo della linea elastica

quindi:

- $$v'''(s) = -\frac{T_y}{J_x E}$$

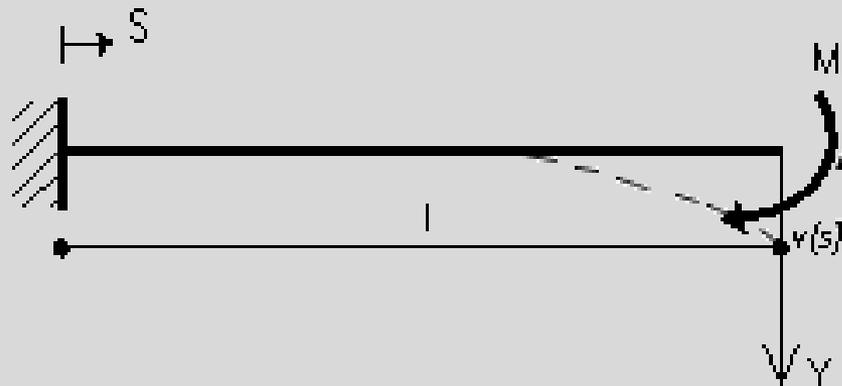
E derivando ulteriormente si ha che:

- $$v^{iv}(s) = -\frac{dT_y}{ds} \frac{1}{J_x E} = \frac{q(s)}{J_x E}$$

Quest'ultima equazione rappresenta la funzione di spostamento di tutta la trave. Una osservazione che va fatta è l'equivalenza tra le varie equazioni che però risultano essere in contraddizione con quanto affermato nella precedente teoria flessionale. Infatti nella flessione pura la deformazione della trave è ad arco di circonferenza mentre nei criteri di rigidezza si ha una equazione differenziale del quarto ordine. Ad ogni modo l'equivalenza di suddette equazioni permette il loro utilizzo mirato a seconda della casistica osservata.

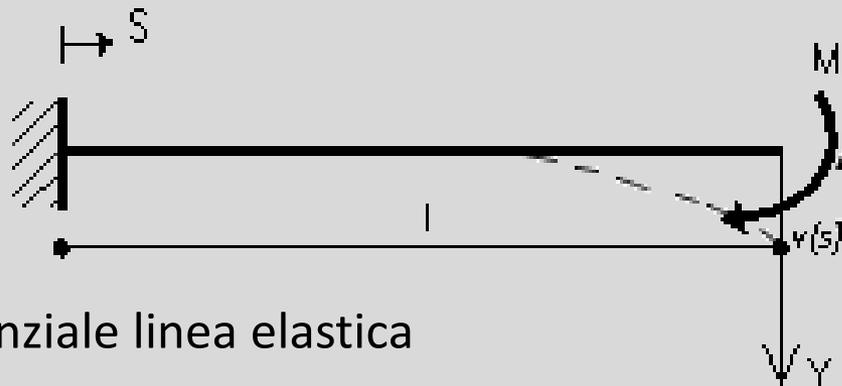
Metodo della linea elastica

ESEMPIO 1- MENSOLA INCASTRATA SOTTOPOSTA A MOMENTO FLETTENTE CONCENTRATO ALL'ESTREMITA'



Metodo della linea elastica

ESEMPIO 1- MENSOLA INCASTRATA SOTTOPOSTA A MOMENTO FLETTENTE CONCENTRATO ALL'ESTREMITA'



Equazione differenziale linea elastica

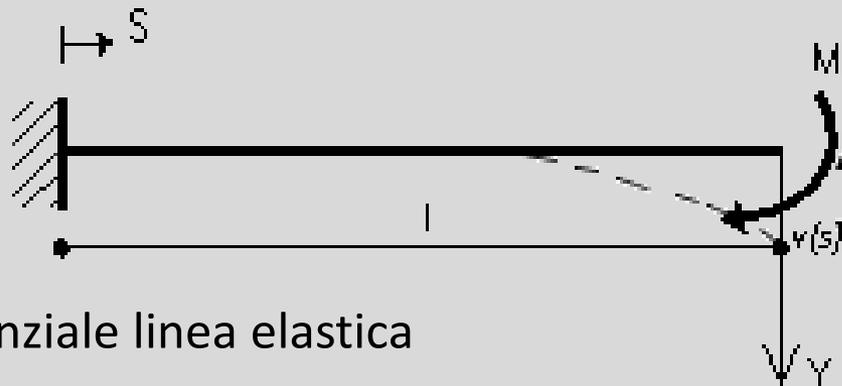
- $v''(s) = -\frac{M}{J_x E}$

- $v'(s) = -\frac{M}{J_x E} s + C_1$

- $v(s) = -\frac{1}{2} \frac{M}{J_x E} s^2 + C_1 s + C_2$

Metodo della linea elastica

ESEMPIO 1- MENSOLA INCASTRATA SOTTOPOSTA A MOMENTO FLETTENTE CONCENTRATO ALL'ESTREMITA'



Equazione differenziale linea elastica

$$\bullet v''(s) = -\frac{M}{J_x E}$$

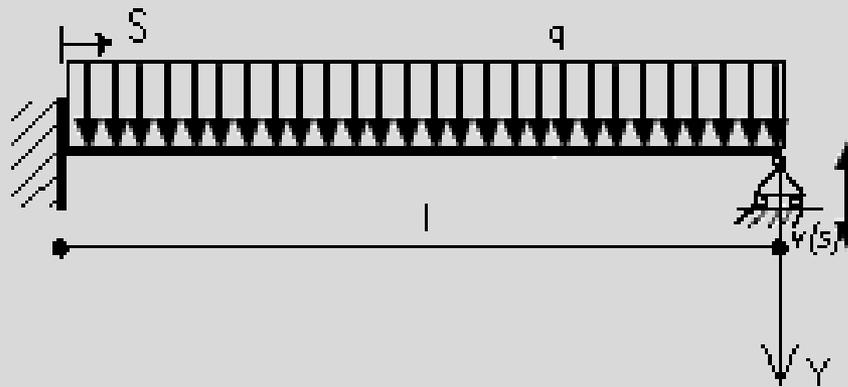
$$\bullet v'(s) = -\frac{M}{J_x E} s + C_1$$

$$\bullet v(s) = -\frac{1}{2} \frac{M}{J_x E} s^2 + C_1 s + C_2 \quad \longrightarrow \quad v(0) = 0 \quad -v'(0) = 0$$



Metodo della linea elastica

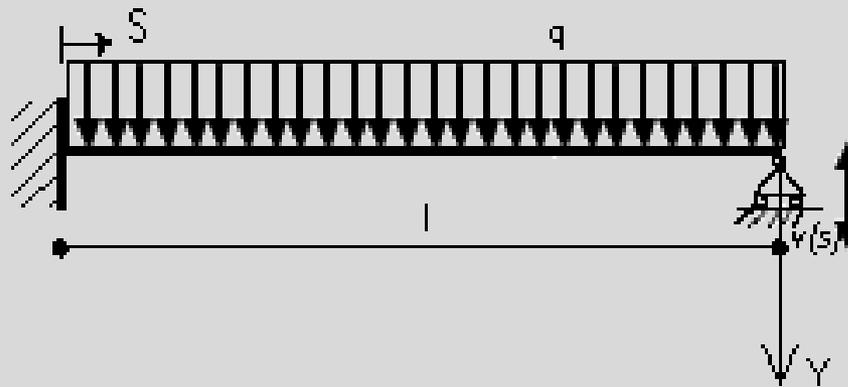
ESEMPIO 2- MENSOLA IPERSTATICA SOTTOPOSTA A CARICO DISTRIBUITO UNIFORME





Metodo della linea elastica

ESEMPIO 2- MENSOLA IPERSTATICA SOTTOPOSTA A CARICO DISTRIBUITO UNIFORME



Equazione differenziale linea elastica

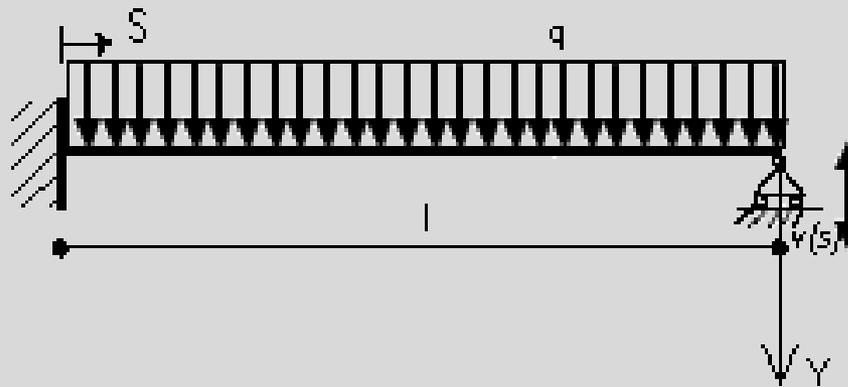
$$\bullet v^{IV}(s) = \frac{q}{J_x E}$$

$$\bullet v'''(s) = \frac{q}{J_x E} s + C_1$$

$$\bullet v''(s) = \frac{1}{2} \frac{q}{J_x E} s^2 + C_1 s + C_2$$

Metodo della linea elastica

ESEMPIO 2- MENSOLA IPERSTATICA SOTTOPOSTA A CARICO DISTRIBUITO UNIFORME



Equazione differenziale linea elastica

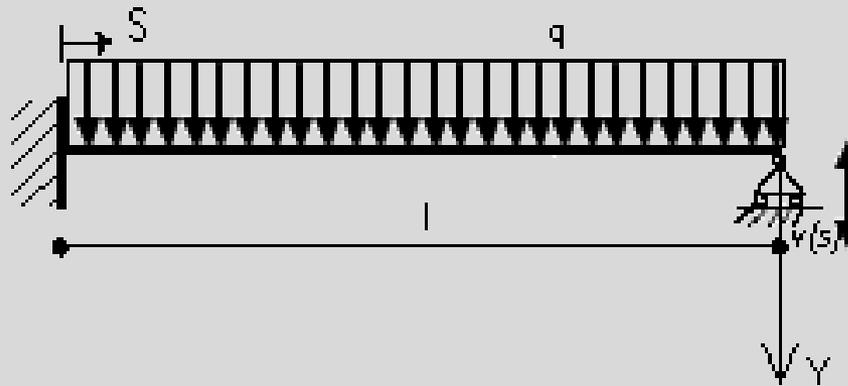
$$\begin{aligned} \bullet v^{IV}(s) &= \frac{q}{J_x E} \\ \bullet v'''(s) &= \frac{q}{J_x E} s + C_1 \\ \bullet v''(s) &= \frac{1}{2} \frac{q}{J_x E} s^2 + C_1 s + C_2 \\ \bullet v'(s) &= \frac{1}{6} \frac{q}{J_x E} s^3 + \frac{1}{2} C_1 s^2 + C_2 s + C_3 \\ \bullet v(s) &= \frac{1}{24} \frac{q}{J_x E} s^4 + \frac{1}{6} C_1 s^3 + \frac{1}{2} C_2 s^2 + C_3 s + C_4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} v(0) &= 0 & -v'(0) &= 0 \\ v(l) &= 0 & M(l) &= 0 \end{aligned}$$

Metodo della linea elastica

ESEMPIO 2- MENSOLA IPERSTATICA SOTTOPOSTA A CARICO DISTRIBUITO UNIFORME



Equazione differenziale linea elastica

$$\bullet \quad v'(s) = \frac{1}{6} \frac{q}{J_x E} s^3 + \frac{1}{2} C_1 s^2 + C_2 s + C_3$$

$$\bullet \quad v(s) = \frac{1}{24} \frac{q}{J_x E} s^4 + \frac{1}{6} C_1 s^3 + \frac{1}{2} C_2 s^2 + C_3 s + C_4$$

$$\longrightarrow \quad v(0) = 0 \quad -v'(0) = 0$$

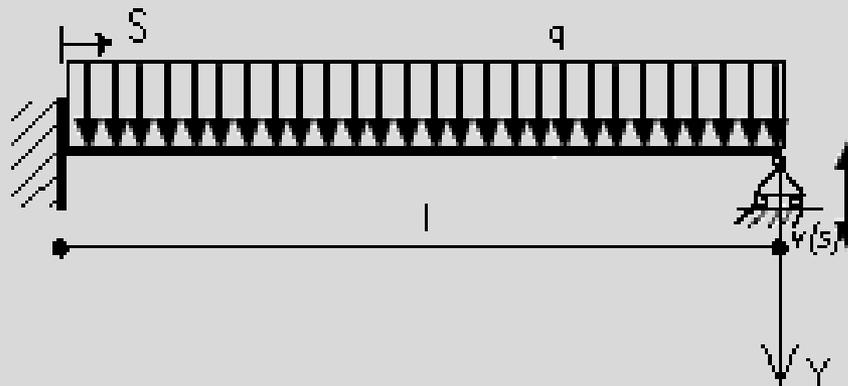


$$C_3 = 0$$

$$C_4 = 0$$

Metodo della linea elastica

ESEMPIO 2- MENSOLA IPERSTATICA SOTTOPOSTA A CARICO DISTRIBUITO UNIFORME



Equazione differenziale linea elastica

$$\bullet v'(s) = \frac{1}{6 J_x E} q s^3 + \frac{1}{2} C_1 s^2 + C_2 s$$

$$\bullet v(s) = \frac{1}{24 J_x E} q s^4 + \frac{1}{6} C_1 s^3 + \frac{1}{2} C_2 s^2$$



$$v(l) = 0 \quad -EJ_x v''(l) = 0$$

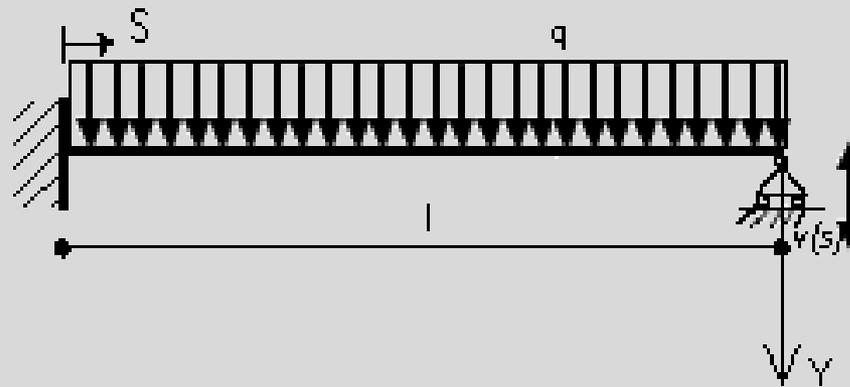


$$\frac{1}{24 J_x E} q l^4 + \frac{1}{6} C_1 l^3 + \frac{1}{2} C_2 l^2 = 0$$

$$-EJ_x \left(\frac{1}{2 J_x E} q l^2 + C_1 l + C_2 \right) = 0$$

Metodo della linea elastica

ESEMPIO 2- MENSOLA IPERSTATICA SOTTOPOSTA A CARICO DISTRIBUITO UNIFORME

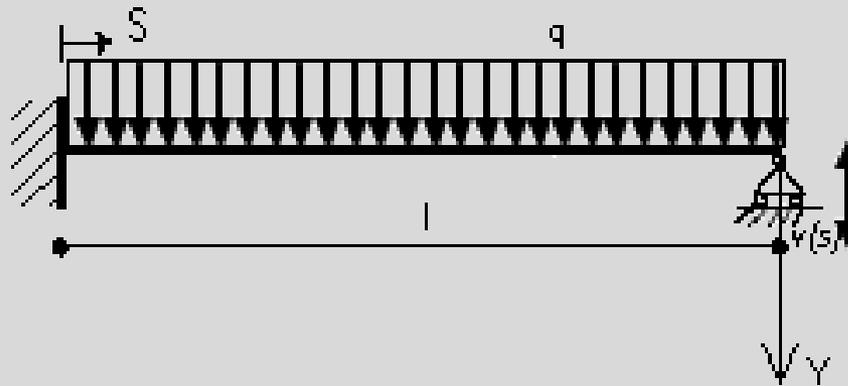


$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{24} \frac{q}{J_x E} l^4 + \frac{1}{6} C_1 l^3 + \frac{1}{2} C_2 l^2 = 0 \\ -EJ_x \left(\frac{1}{2} \frac{q}{J_x E} l^2 + C_1 l + C_2 \right) = 0 \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad C_1 = -\frac{5ql}{8EJ} \quad C_2 = \frac{1ql^2}{8EJ}$$

$$v(s) = \frac{1}{24} \frac{q}{J_x E} s^4 - \frac{5}{48} \frac{qls^3}{EJ_x} + \frac{1}{16} \frac{ql^2 s^2}{EJ_x} = \frac{1}{8} \frac{q}{J_x E} \left(\frac{s^4}{3} - \frac{5}{6} l s^3 + \frac{1}{2} l^2 s^2 \right)$$

Metodo della linea elastica

ESEMPIO 2- MENSOLA IPERSTATICA SOTTOPOSTA A CARICO DISTRIBUITO UNIFORME



derivando:

$$v(s) = \frac{1}{24} \frac{q}{J_x E} s^4 - \frac{5}{48} \frac{q l s^3}{E J_x} + \frac{1}{16} \frac{q l^2 s^2}{E J_x} = \frac{1}{8} \frac{q}{J_x E} \left(\frac{s^4}{3} - \frac{5}{6} l s^3 + \frac{1}{2} l^2 s^2 \right)$$



$$\varphi(s) = -v'(s) = -\frac{1}{8} \frac{q}{J_x E} \left(\frac{4}{3} s^3 - \frac{5}{2} l s^2 + l^2 s \right)$$

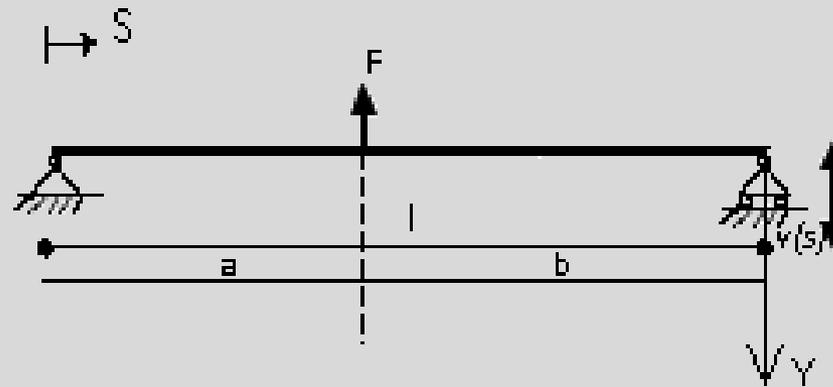
$$M(s) = -E J_x v''(s) = -\frac{q}{8} (4s^2 - 5ls + l^2)$$

$$T(s) = -E J_x v'''(s) = -\frac{q}{8} (8s - 5l)$$



Metodo della linea elastica

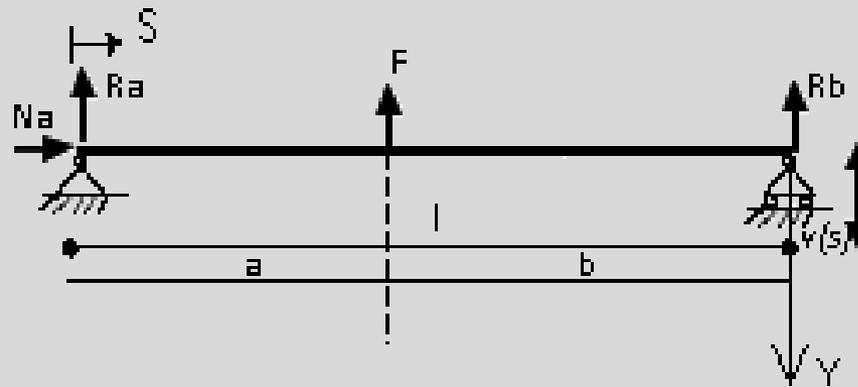
ESEMPIO 3- TRAVE APPOGGIATA CON CARICO CONCENTRATO





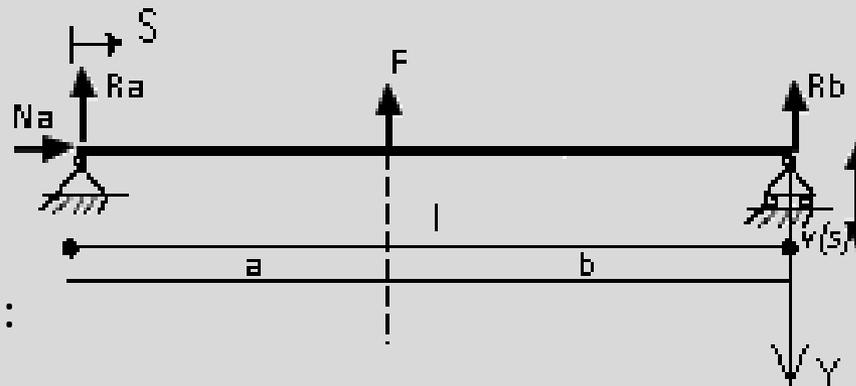
Metodo della linea elastica

ESEMPIO 3- TRAVE APPOGGIATA CON CARICO CONCENTRATO



Metodo della linea elastica

ESEMPIO 3- TRAVE APPOGGIATA CON CARICO CONCENTRATO



Reazioni vincolari:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_a = 0 \\ R_a l + Fb = 0 \Rightarrow R_a = -\frac{Fb}{l} \\ R_b l + Fa = 0 \Rightarrow R_b = -\frac{Fa}{l} \end{array} \right.$$



Metodo della linea elastica

ESEMPIO 3- TRAVE APPOGGIATA CON CARICO CONCENTRATO

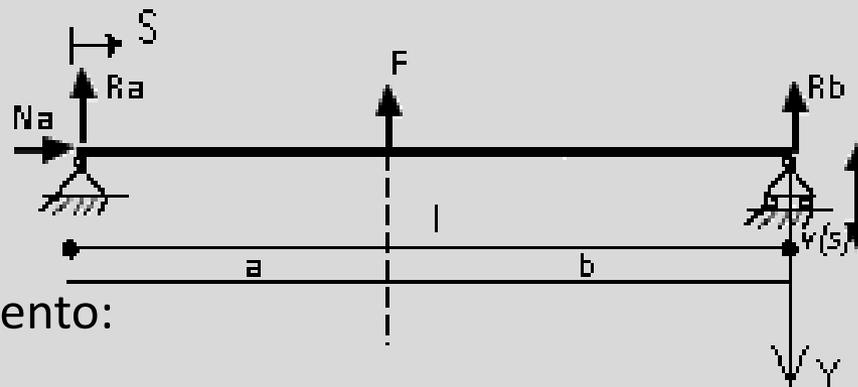


Diagramma momento:

Metodo della linea elastica

ESEMPIO 3- TRAVE APPOGGIATA CON CARICO CONCENTRATO

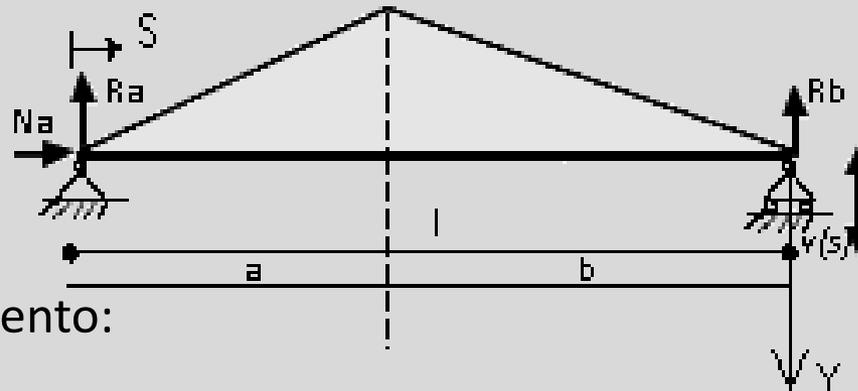
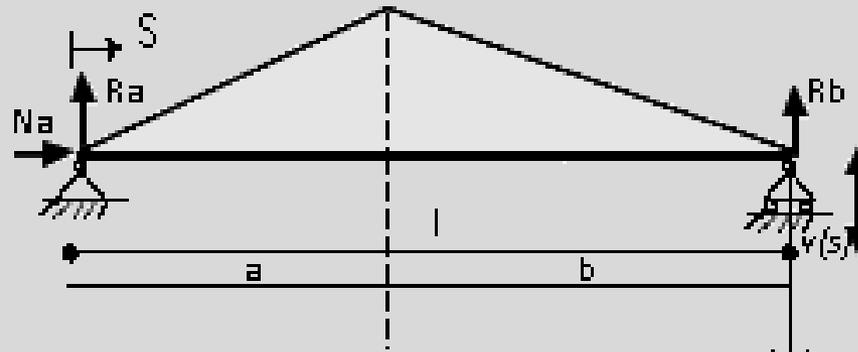


Diagramma momento:

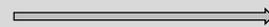
$$\left\{ \begin{array}{l} 0 \leq s \leq a \quad M + R_a s = 0 \Rightarrow M = -R_a s = \frac{Fb}{l} s \\ a \leq s \leq l \quad M + R_a s + F(s-a) = 0 \Rightarrow M = -R_a s - F(s-a) = \frac{Fb}{l} s - F(s-a) \end{array} \right.$$

Metodo della linea elastica

ESEMPIO 3- TRAVE APPOGGIATA CON CARICO CONCENTRATO



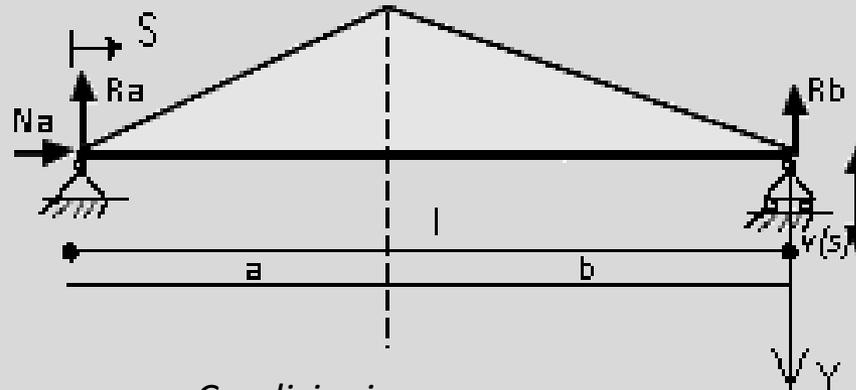
$$\begin{cases} v''(s) = -\frac{M}{J_x E} \\ v'(s) = -\frac{M}{J_x E} s + C_1 \end{cases}$$



$$\begin{cases} 0 \leq s \leq a \\ a \leq s \leq l \end{cases} \begin{cases} v_1''(s) = -\frac{M}{J_x E} = -\frac{Fb}{J_x E l} s \\ \varphi_1 = -v_1'(s) = \frac{Fb}{J_x E l} \frac{s^2}{2} + C_1 \\ v_1(s) = -\frac{Fb}{J_x E l} \frac{s^3}{6} - C_1 s + C_2 \\ v_2''(s) = -\frac{M}{J_x E} = -\frac{Fb}{J_x E l} s + \frac{F}{J_x E} (s-a) \\ \varphi_2 = -v_2'(s) = \frac{Fb}{J_x E l} \frac{s^2}{2} - \frac{F}{2EJ_x} (s-a)^2 + C_3 \\ v_2(s) = -\frac{Fb}{J_x E l} \frac{s^3}{6} + \frac{F}{6EJ_x} (s-a)^3 - C_3 s + C_4 \end{cases}$$

Metodo della linea elastica

ESEMPIO 3- TRAVE APPOGGIATA CON CARICO CONCENTRATO

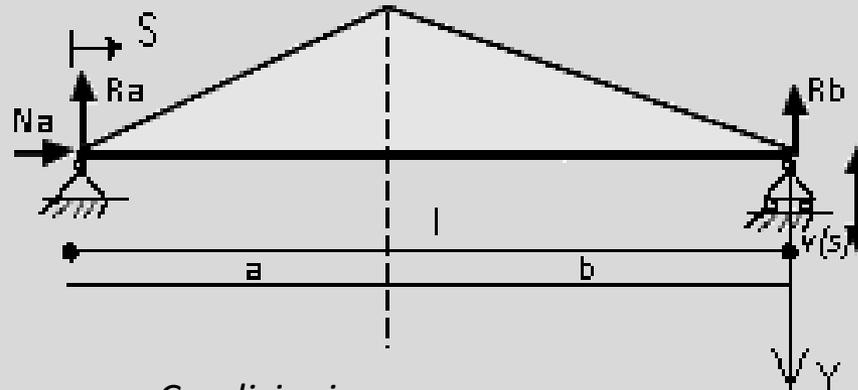


$$\begin{cases}
 0 \leq s \leq a & \begin{cases}
 v_1''(s) = -\frac{M}{J_x E} = -\frac{Fb}{J_x EI} s \\
 \varphi_1 = -v_1'(s) = \frac{Fb}{J_x EI} \frac{s^2}{2} + C_1 \\
 v_1(s) = -\frac{Fb}{J_x EI} \frac{s^3}{6} - C_1 s + C_2
 \end{cases} \\
 a \leq s \leq l & \begin{cases}
 v_2''(s) = -\frac{M}{J_x E} = -\frac{Fb}{J_x EI} s + \frac{F}{J_x E} (s-a) \\
 \varphi_2 = -v_2'(s) = \frac{Fb}{J_x EI} \frac{s^2}{2} - \frac{F}{2EJ_x} (s-a)^2 + C_3 \\
 v_2(s) = -\frac{Fb}{J_x EI} \frac{s^3}{6} + \frac{F}{6EJ_x} (s-a)^3 - C_3 s + C_4
 \end{cases}
 \end{cases}$$

Condizioni per determinare costanti integrazione
 \longrightarrow

Metodo della linea elastica

ESEMPIO 3- TRAVE APPOGGIATA CON CARICO CONCENTRATO



$$0 \leq s \leq a \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1'''(s) = -\frac{M}{J_x E} = -\frac{Fb}{J_x E l} s \\ \varphi_1 = -v_1'(s) = \frac{Fb}{J_x E l} \frac{s^2}{2} + C_1 \\ v_1(s) = -\frac{Fb}{J_x E l} \frac{s^3}{6} - C_1 s + C_2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{Condizioni per} \\ \text{determinare} \\ \text{costanti} \\ \text{integrazione} \end{array}$$

$$\text{Condizioni di continuità} \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_1(a) = \varphi_2(a) \Rightarrow C_1 = C_3 \\ v_1(a) = v_2(a) \Rightarrow C_2 = C_4 \end{array} \right.$$

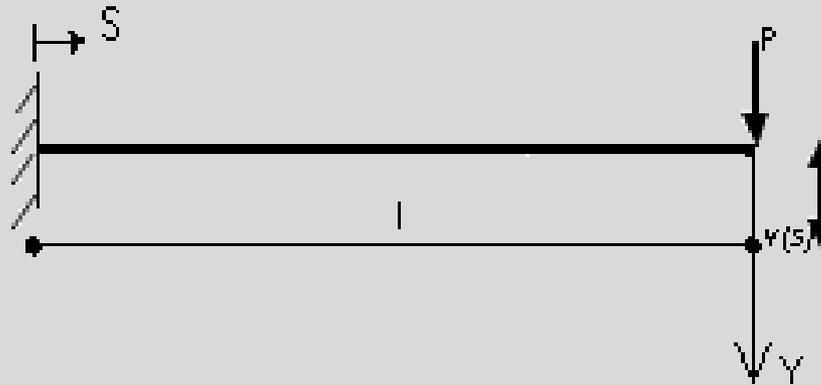
$$a \leq s \leq l \quad \left\{ \begin{array}{l} v_2'''(s) = -\frac{M}{J_x E} = -\frac{Fb}{J_x E l} s + \frac{F}{J_x E} (s-a) \\ \varphi_2 = -v_2'(s) = \frac{Fb}{J_x E l} \frac{s^2}{2} - \frac{F}{2EJ_x} (s-a)^2 + C_3 \\ v_2(s) = -\frac{Fb}{J_x E l} \frac{s^3}{6} + \frac{F}{6EJ_x} (s-a)^3 - C_3 s + C_4 \end{array} \right.$$

$$\text{Condizioni vincolari agli estremi} \quad \left\{ \begin{array}{l} v_1(0) = 0 \Rightarrow C_2 = C_4 = 0 \\ v_2(l) = 0 \Rightarrow -\frac{Fb}{lEJ_x} \frac{l^3}{6} + \frac{F}{6EJ_x} (l-a)^3 - C_3 l = 0 \\ \Rightarrow C_3 = C_1 = \frac{Fb}{lEJ_x} \frac{(b^2 - l^2)}{6} \end{array} \right.$$



Metodo della linea elastica

HOMEWORK- MENSOLA INCASTRATA CON CARICO IN PUNTA



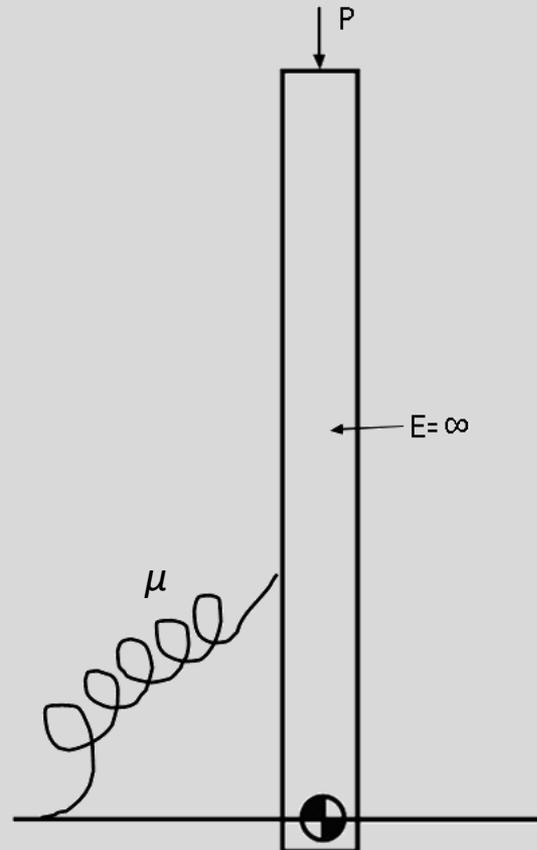
Stabilità strutturale

- Per stabilità strutturale si intende quella capacità del sistema, qualora venga applicata una perturbazione dalla sua condizione di equilibrio, di tornare, dopo un determinato transitorio, allo stato di stabilità.
- Fin qui si è ritenuta la trave infinitamente rigida alla compressione. Nella realtà anche nel caso di compressione può essere soggetta ad una condizione di instabilità.



Stabilità strutturale

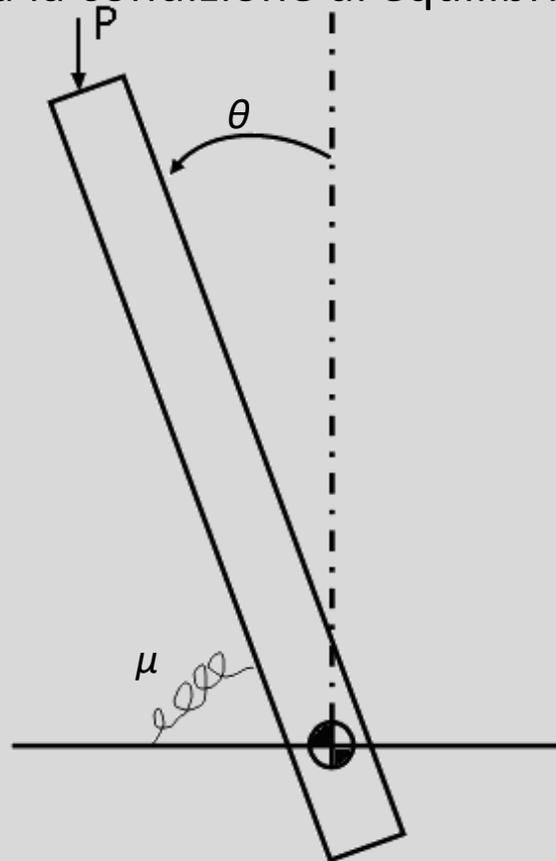
- Si consideri il seguente sistema con asta infinitamente rigida incernierata sottoposta a compressione P e con elasticità concentrata μ





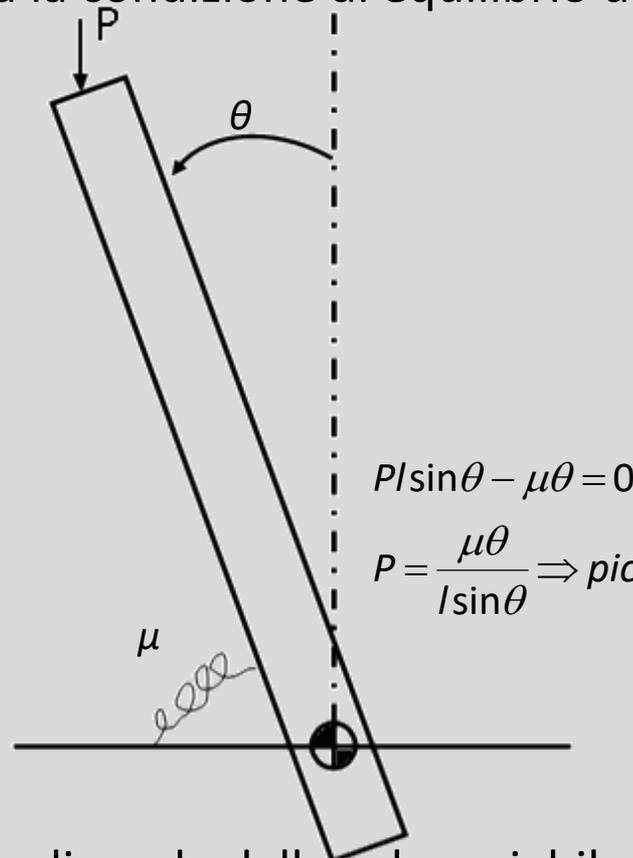
Stabilità strutturale

- Dall'equazione di equilibrio si estrapola il valore limite di P oltre il quale non è più verificata la condizione di equilibrio del sistema



Stabilità strutturale

- Dall'equazione di equilibrio si estrapola il valore limite di P oltre il quale non è più verificata la condizione di equilibrio del sistema



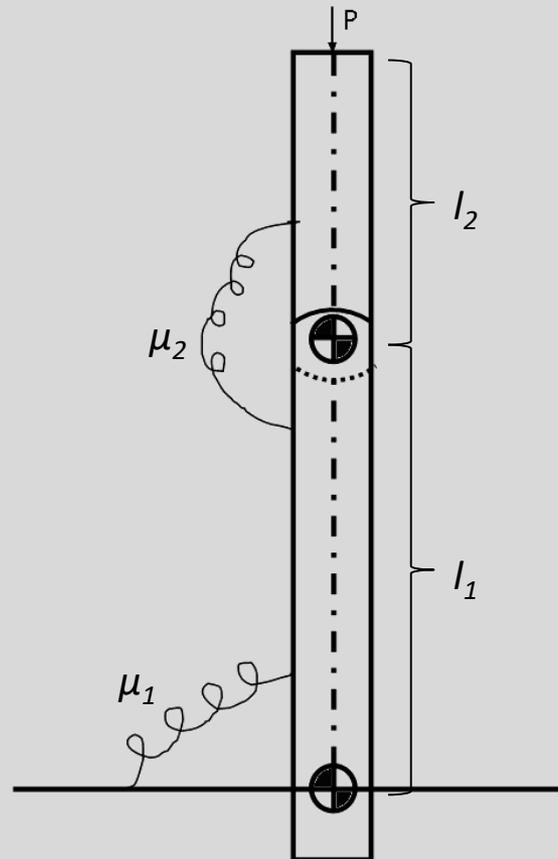
$$P = \frac{\mu \theta}{l \sin \theta} \Rightarrow \text{piccoli spostamenti} \Rightarrow \sin \theta = \theta \Rightarrow P_{\text{CRITICA}} = \frac{\mu}{l}$$

L'equilibrio del sistema dipende dalla sola variabile θ . Per tale motivo è definito sistema a 1 g.d.l.



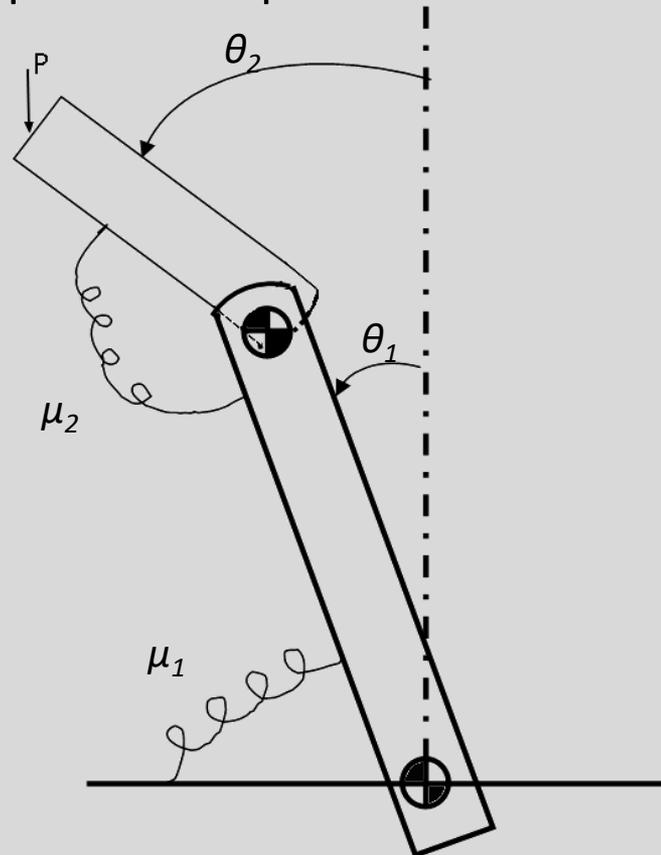
Stabilità strutturale

- Si consideri il seguente sistema con due gradi di libertà θ e due elasticità concentrate μ



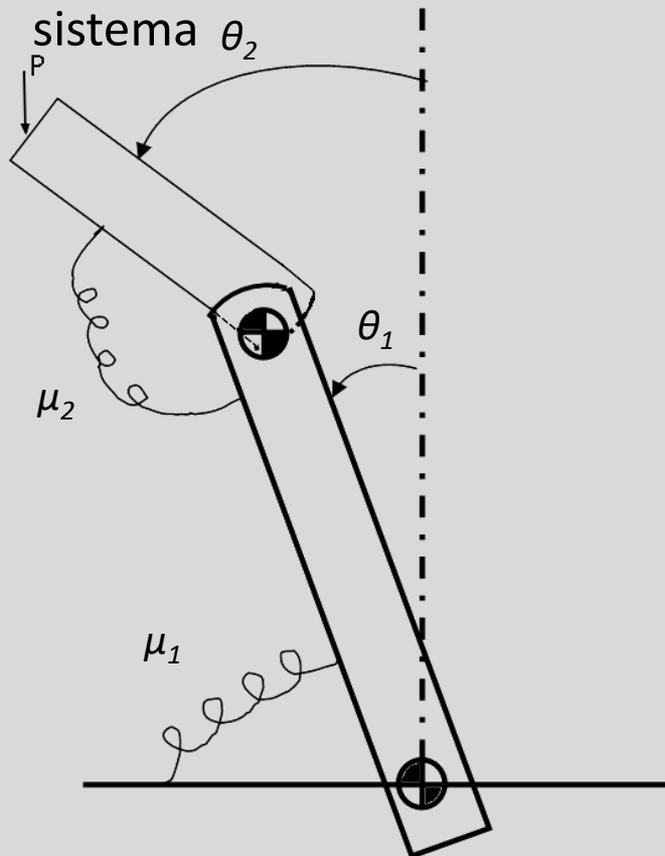
Stabilità strutturale

- Dalle equazioni di equilibrio relative ai due corpi rigidi si estrapola il valore limite di P oltre il quale non è più verificata la condizione di equilibrio del sistema



Stabilità strutturale

- Dalle equazioni di equilibrio relative ai due corpi rigidi si estrapola il valore limite di P oltre il quale non è più verificata la condizione di equilibrio del sistema



$$\begin{cases} Pl_2\theta_2 - \mu_2(\theta_2 - \theta_1) = 0 \\ P(l_1\theta_1 + l_2\theta_2) - \mu_1\theta_2 = 0 \end{cases}$$

Esprimendo il forma
matriciale il sistema

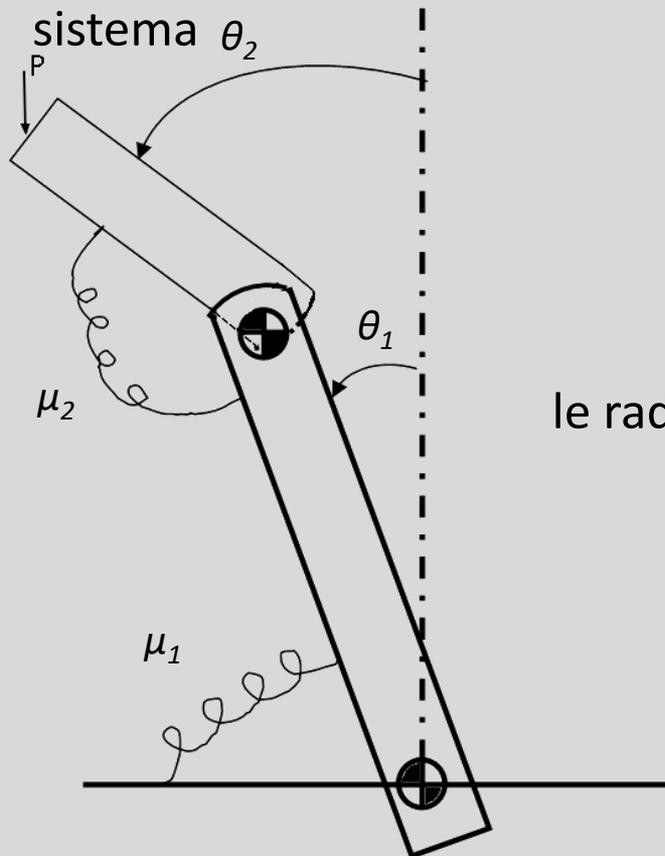
$$\begin{vmatrix} \mu_2 & Pl_2 - \mu_2 \\ Pl_1 - \mu_1 & Pl_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$\Omega = \begin{vmatrix} \mu_2 & Pl_2 - \mu_2 \\ Pl_1 - \mu_1 & Pl_2 \end{vmatrix}$$

$$\det|\Omega| = 0 \Leftrightarrow Pl_2\mu_2 - [(Pl_2 - \mu_2)(Pl_1 - \mu_1)] = 0$$

Stabilità strutturale

- Dalle equazioni di equilibrio relative ai due corpi rigidi si estrapola il valore limite di P oltre il quale non è più verificata la condizione di equilibrio del sistema θ_2



$$\det|\Omega|=0 \Leftrightarrow Pl_2\mu_2 - [(Pl_2 - \mu_2)(Pl_1 - \mu_1)] = 0$$

Ponendo:

$$\mu_1 = \mu \quad \mu_2 = 2\mu \quad l_2 = l_1 = l$$

le radici dell'equazione associata al determinante

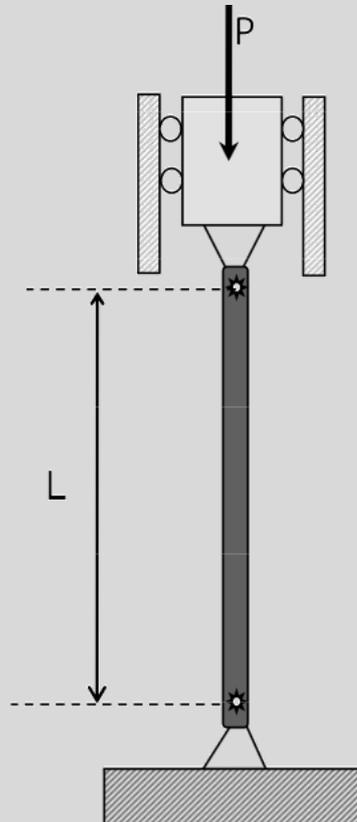
$$P_{CRITICA_{1,2}} = \frac{\mu}{l} (2 \pm \sqrt{2})$$

$$P_{CRITICA_{1}} = \frac{\mu}{l} (2 - \sqrt{2}) \Rightarrow \theta_1 \sim 0.4\theta_2$$

$$P_{CRITICA_{2}} = \frac{\mu}{l} (2 + \sqrt{2}) \Rightarrow \theta_1 \sim 2\theta_2$$

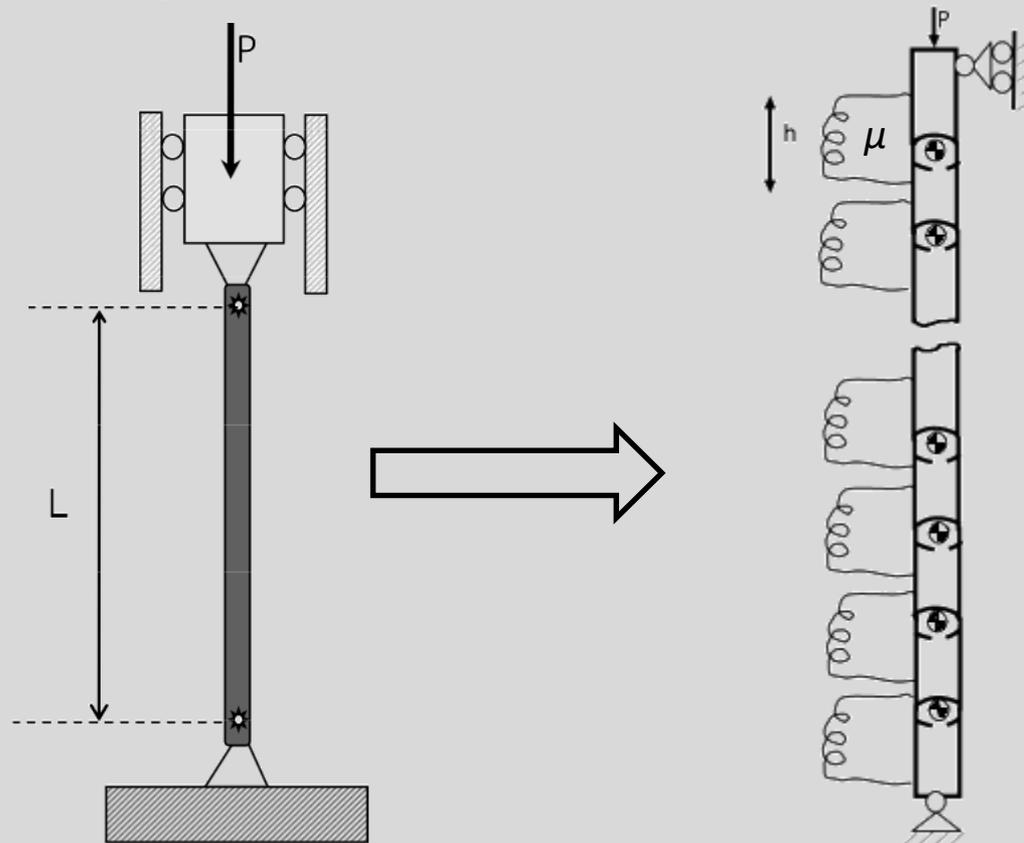
Stabilità strutturale

- Si analizzi il caso di una trave appoggiata e caricata assialmente



Stabilità strutturale

- Intuitivamente sulla base di quanto visto nulla vieterebbe di approssciare il problema con infiniti gradi di libertà (infiniti conci di trave e molle torsionali)



Stabilità strutturale

- Effettuando la seguente approssimazione è possibile discretizzare la trave continua in tanti conci di trave sottoposti a carico flessionale di lunghezza h con aste discrete incernierate e interconnesse da molle torsionali



- Da cui:

$$\mu = \frac{J_x E}{h}$$

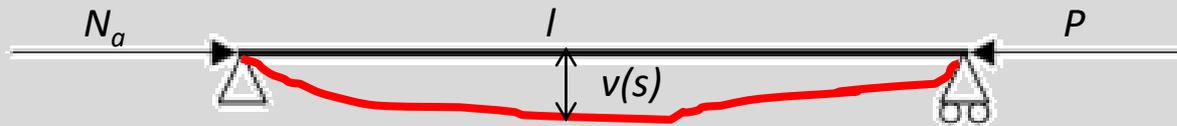
Tale approccio però è da ritenersi oneroso e poco immediato

Problema di Eulero

- Si consideri la trave appoggiata sottoposta a carico assiale



Per studiare l'instabilità della trave si ipotizza una condizione lontana da quella ideale, ossia deviando il suo asse dalla sua linea retta ideale



Sulla base di quanto detto per la teoria della linea elastica è possibile scrivere

$$-J_x E v''(s) = M_x(s)$$

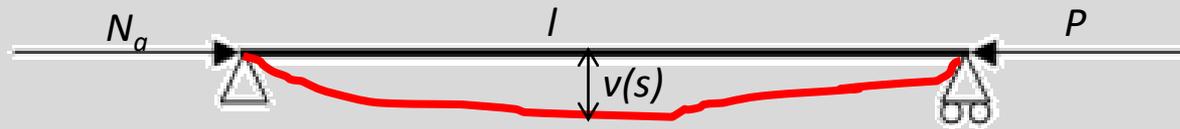
Considerando il momento generato dall'inflessione della trave e il carico assiale si può scrivere

$$-J_x E v''(s) = P v(s)$$

$$v''(s) + k^2 v(s) = 0 \quad \text{con} \quad k^2 = \frac{P}{EJ_x}$$

Problema di Eulero

- Si tratta di una equazione differenziale del secondo ordine con soluzione



$$v(s) = A \sin(ks + \varphi) = \bar{A} \sin(ks) + \bar{B} \cos(ks)$$

Da cui è possibile ricavare

$$v'(s) = k \bar{A} \cos(ks) - k \bar{B} \sin(ks)$$

$$v''(s) = -k^2 \bar{A} \sin(ks) - k^2 \bar{B} \cos(ks)$$

E ponendo le condizioni al contorno cinematiche sui vincoli

$$v(0) = 0$$

$$v(l) = 0$$

Problema di Eulero

- Imponendo le condizioni al contorno si ottiene il seguente sistema

$$\begin{cases} v(0) = 0 = \bar{B} \\ v(l) = 0 = \bar{A}\sin(kl) + \bar{B}\cos(kl) \end{cases}$$

Esprimendolo in forma matriciale si ha che

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ \sin(kl) & \cos(kl) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Tale sistema omogeneo a due equazioni in due incognite ammette come soluzione

$$\sin(kl) = 0$$

da cui

$$kl = n\pi \quad \text{con} \quad n \in \mathbb{N}$$

- la condizione $n \in \mathbb{N}$ deriva da $k = \sqrt{\frac{P}{EJ_x}} > 0$ in realtà n dovrebbe appartenere a \mathbb{Z}



Problema di Eulero

- Eguagliando il valore di k trovato nella soluzione del sistema al valore imposto ed elevando al quadrato ambo i membri si ha che

$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_x}{l^2}$$

Il più piccolo dei valori di P_{cr} corrisponde al passaggio da una condizione di equilibrio stabile ad una instabile. Tale valore è quello per $n=1$, ed è detto il carico critico euleriano dell'asta compressa

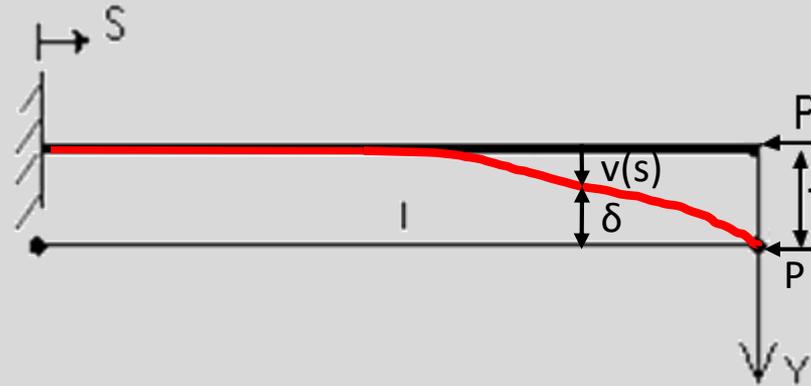
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}$$

Per evitare questo fenomeno, occorre avere un elevato valore della P_{cr} ad esempio:

- aumentando l'area della sezione
- riducendo la lunghezza dell'oggetto
- utilizzando materiali con elevato modulo elastico

Problema di Eulero

- Riprendiamo il caso di una mensola incastrata ma caricata assialmente



Si fissano le condizioni al contorno

$$v(0)=0$$

$$v(l)=f$$

la formulazione della linea elastica diventa

$$-J_x E v''(s) = P(v(s) - f)$$

Da cui risolvendo l'equazione differenziale e imponendo le condizioni al contorno si ha

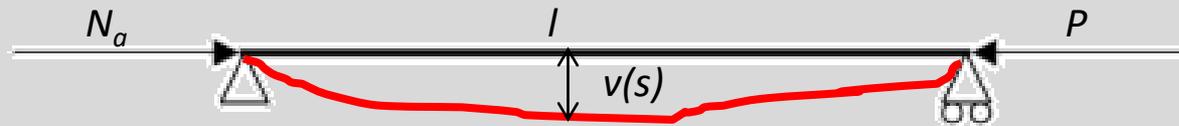
$$P_{cr} = \frac{\pi^2 E J_x}{(2l)^2}$$

Problema di Eulero

- Torniamo alla trave appoggiata sottoposta a carico assiale



Per studiare l'instabilità della trave si ipotizza una condizione lontana da quella ideale, ossia deviando il suo asse dalla sua linea retta ideale



Sulla base di quanto detto per la teoria della linea elastica è possibile scrivere

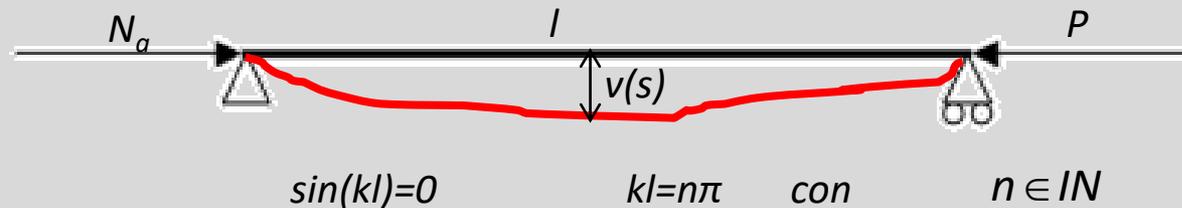
$$-J_x E v''(s) = M_x(s)$$

Considerando le condizioni al contorno

$$v(0) = v''(0) = 0 \quad v(l) = v''(l) = 0$$

Problema di Eulero

- Il sistema come visto ammette soluzione non banale



Da cui è possibile ricavare

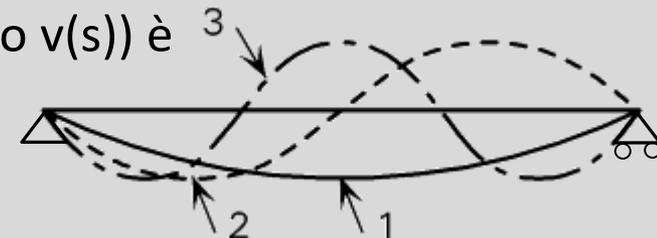
$$P_{cr} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_x}{l^2}$$

E come detto il carico critico che si ricava per il suo valore più piccolo $n=1$

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_x}{l^2}$$

Mentre la deformata (diagramma dello spostamento $v(s)$) è

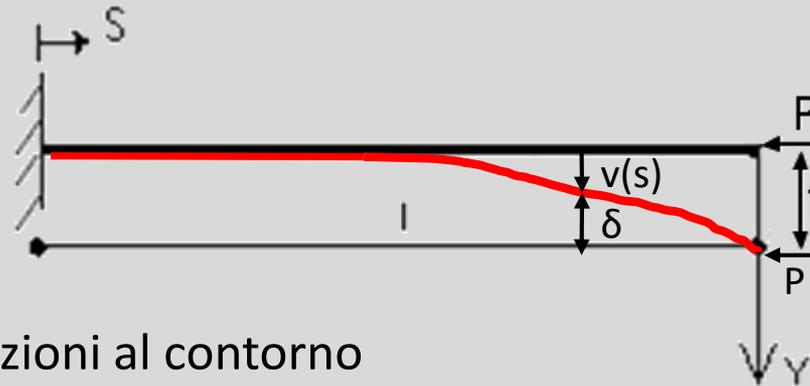
$$v(s) = A \sin\left(\frac{n\pi}{l} s\right)$$



Per $n=1$ la trave si deforma secondo la sinusoide avente lunghezza d'onda $L=2l$

Problema di Eulero

- Riprendiamo il caso di una mensola incastrata ma caricata assialmente



Imponendo le condizioni al contorno

$$v(0) = -v'(0) = 0 \quad v(l) = M(l) = -EJ_x v''(l) = 0$$

la formulazione della linea elastica ed il sistema omogeneo ad esso associato ammette soluzione per

$$\cos(kl) = 0 \quad kl = (2n-1) \frac{\pi}{2} \quad \text{con } n \in \mathbb{N}$$

Da cui risolvendo l'equazione differenziale e imponendo le condizioni al contorno si ha

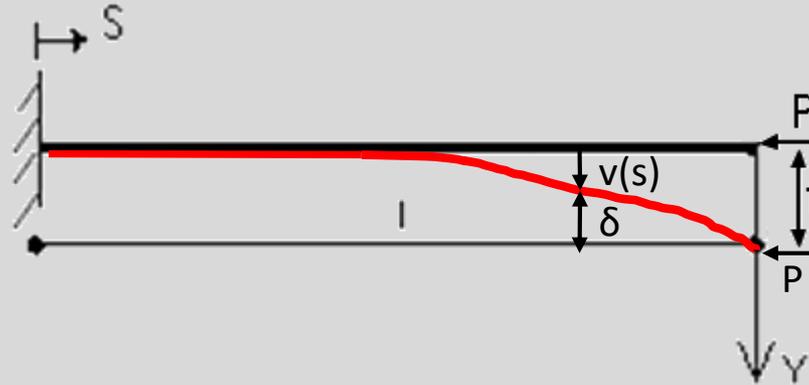
$$P_{cr} = (2n-1)^2 \frac{\pi^2 EJ_x}{4l^2}$$

Considerando il suo valore minimo per $n=1$ si ha che

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_x}{(2l)^2}$$

Problema di Eulero

- Riprendiamo il caso di una mensola incastrata ma caricata assialmente



Il valore del carico critico è pari a $\frac{1}{4}$ del caso della trave appoggiata e la sua deformata critica risulta essere pari a

$$v(s) = A\left(1 - \cos \frac{\pi}{2l}s\right)$$

La sinusoide associata alla deformata della trave avrà quindi lunghezza d'onda $L = 4l$

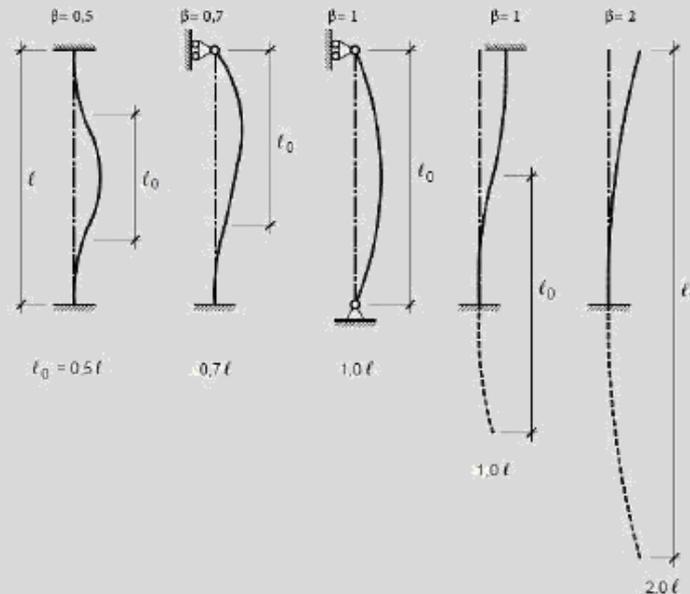


Problema di Eulero

- Per le travi ad una sola campata il carico critico può essere scritto nella seguente forma

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EJ_x}{l_0^2}$$

Dove $l_0 = L/2$ è la lunghezza libera di inflessione corrispondente alla semilunghezza d'onda della sinusoide formata dalla linea elastica





Problema di Eulero

- Quindi in buona sostanza quando si ha un carico normale agente sulla trave occorre verificare due condizioni

*soddisfacimento
criterio resistenza*

$$\alpha_{RES} = \frac{\sigma_{amm}}{|\sigma_{zz}|}$$

*soddisfacimento
criterio stabilità*

$$\alpha_{STAB} = \frac{P_{CR}}{|P|}$$

Ma ricordando che lo sforzo assiale

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{A}$$

Ricordando che la formula di Eulero è valida in campo lineare si ha che

$$\sigma_{amm} > \frac{P_{CR}}{A} = \frac{\pi^2 EJ_x}{l_0^2 A}$$

Di conseguenza appare evidente come sia utile al fine di aumentare la stabilità della trave il suo irrigidimento e non un suo irrobustimento



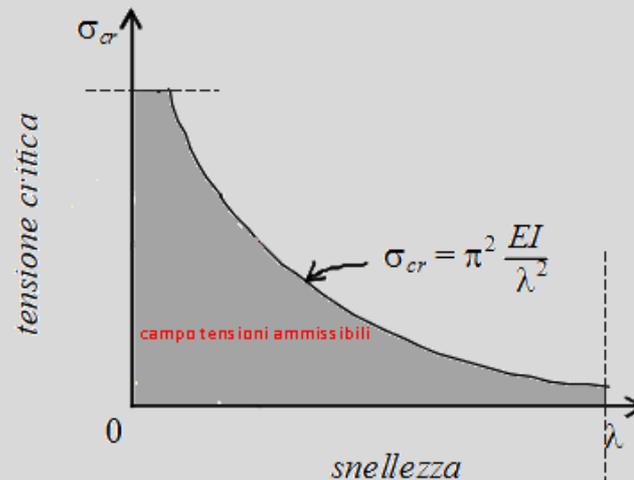
Problema di Eulero

- Dove

$$\lambda = \frac{l_0}{\rho_{\min}}$$

è la *snellezza* dell'asta e ρ_{\min} il *raggio d'inerzia minimo* della sezione trasversale dell'asta ($\rho_{\min} = \sqrt{\frac{J_{\min}}{A}}$).

- Pertanto, se la snellezza λ dell'asta tende a zero la tensione critica σ_{cr} tende ad infinito
- Viceversa se la snellezza λ tende ad un valore molto grande (al limite infinito) la tensione critica tende a $\sigma_{cr} = 0$



Problema di Eulero

- PROBLEMA SPAZIALE

Quando si è nello spazio si possono avere due valori differenti $J_x \neq J_y$

In tal caso andranno stimati due valori del carico critico relativi ai due momenti di inerzia

$$P_{CRx} = \frac{\pi^2 E J_x}{I_0^2} \qquad P_{CRy} = \frac{\pi^2 E J_y}{I_0^2}$$

E dei due considereremo il valore minimo che sarà il carico massimo ammissibile al di là del quale si avrà instabilità. Quindi più in generale è opportuno parlare spazialmente di carico critico euleriano sulla base della seguente formula

$$P_{CR} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{I_0^2}$$